数理解析研究所講究録
第 1826 巻 2013 年 51-52

ON SPECIAL VALUES OF CERTAIN L-FUNCTIONS
ある L 函数の特殊値について
(森本和輝との共同研究)

古澤 昌秋
(大阪市立大学大学院理学研究科)

ABSTRACT. 重さ k の newform h を取り，それに対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約尖点表現を π とする．次に (V,q) は $\mathbb{Q}$ 上の 2 次形式で，q は $\mathbb{R}$ 上正定値とする．τ は $\mathrm{SO}(V,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約保型表現で，τ_∞ は自明な表現とする．このとき，テンソル L 函数 $L(s,\pi\otimes\tau)$ について，最大（と思われる）臨界点における特殊値の代数性を示した．その特殊な場合として，GL(2) の Rankin triple L 函数のある unbalanced case における特殊値の代数性を示した．

主定理. π を重さ k, *Nebentypus* ε の $\Gamma_0(N)$ に関する正則 *newform* h に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約尖点表現とする．(V,q) は $\mathbb{Q}$ 上の 2 次形式で，q は $\mathbb{R}$ 上正定値とする．τ は $\mathrm{SO}(V,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約保型表現で τ_∞ は自明な表現とする．いま，

$$n=\dim_\mathbb{Q} V\geq 4 \quad \text{かつ} \quad k>2n$$

とする．

整数 $A(n)$ を，

$$A(n)=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot(2k-n)$$

によって定める．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．周期 $P(\pi,\tau)$ を

$$P(\pi,\tau)=\pi^{A(n)}\langle h,h\rangle^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

によって定める．ただし，$\langle h,h\rangle$ は *Petersson* 内積

$$\langle h,h\rangle=\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}}|h(z)|^2y^{k-2}\,dx\,dy$$

を表す．

このとき，$\mathbb{Q}$ の無限素点を含むような素点の有限集合 S で，*partial* L 函数

$$L_S(s,\pi\otimes\tau)=\prod_{v\notin S}L(s,\pi_v\otimes\tau_v)$$

について，

$$\frac{L_S\left(\frac{k-n+1}{2},\pi\otimes\tau\right)}{P(\pi,\tau)}\in\overline{\mathbb{Q}}$$

となるものが存在する．ここで，$\overline{\mathbb{Q}}$ は，$\mathbb{Q}$ の代数閉包を表す．

Date: 2012 年 1 月 17 日 RIMS 研究集会「保型形式と保型的 L 函数の研究」．本研究集会における講演の機会を与えてくださった研究代表者の森山知則さんに感謝します．
この研究は科学研究費補助金基盤研究 (C)22540029 によって援助されています．

証明は，考察する特殊値が $SO(n+1,2)$ の Eisenstein 級数の Bessel model 型の Fourier 係数として得られることを用いる．論文 [6] にあるように，水本 [9] と Böcherer [2] による，次数 2 の Klingen Eisenstein 級数の Fourier 係数の公式が動機になっている．不分岐計算は，$n=4$ の場合が [4] において行われ，後に遙かな一般化が Ginzburg, Piatetski-Shapiro & Rallis [7] によってなされた．主定理の証明の詳細については，[5] に委ねたい．

いま，D を $\mathbb{Q}$ 上の 4 次元中心的多元環とすると，accidental isomorphism

$$SO(D) \simeq \left\{(d_1,d_2)\in D^\times\times D^\times \mid N(d_1)=N(d_2)\right\} / \left\{(a,a)\mid a\in\mathbb{Q}^\times\right\}$$

が成り立つ．これから，次の系が成り立つ．

系. f_i $(i=1,2,3)$ を $\Gamma_0(N_i)$ に関する重さ k_i, *Nebentypus* ε_i の正則 *newform* とし，π_i を f_i に対応する $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約尖点表現とする．いま，

$$k_1>8,\quad k_2=k_3=2 \quad \text{かつ} \quad \varepsilon_2\varepsilon_3=1$$

とし，$\mathbb{Q}$ 上の定符号 4 元数環 D で，π_2 と π_3 が $D^\times(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ に *Jacquet-Langlands-Shimizu* 対応を持つものが存在するとする．

このとき，

$$\frac{L(k_1-1,f_1\otimes f_2\otimes f_3)}{\pi^{4k_1-8}\langle f_1,f_1\rangle^2}\in\overline{\mathbb{Q}}$$

が成り立つ．

系において，$L(s,f_1\otimes f_2\otimes f_3)$ は，$s\mapsto k_1+k_2+k_3-2-s$ に関して函数等式を持つように正規化されている．Blasius [1] は GL(2) の Rankin triple L 函数について，Deligne の予想 [3] を明示的に書き下した．上記の結果は，Blasius による明示化と一致する．これまで unbalanced case, すなわち $k_1\geq k_2\geq k_3$ かつ $k_1\geq k_2+k_3$ の場合で特殊値の代数性が示されているのは，Harris-Kudla [8] による函数等式の中心値の場合に限られていたが，上記の結果は中心値ではなく，最大の critical point における値である．

References

[1] Blasius, D.: Critical values of certain tensor product L-functions. Appendix to T. Orloff, Special values and mixed weight triple products. Invent. Math. **90**, 181–188 (1987)

[2] Böcherer, S.: Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. **261**, 23–41 (1982)

[3] Deligne, P.: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1979)

[4] Furusawa, M.: On Fourier coefficients of Eisenstein series on SO(5, 2). Amer. J. Math. **115**, 823–860 (1993)

[5] Furusawa, M., Morimoto, K.: On special values of certain L-functions, preprint.

[6] Furusawa, M., Shalika, J. A.: On Fourier coefficients of Eisenstein series. Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 81–98, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD (1989)

[7] Ginzburg, D., Piatetski-Shapiro, I., Rallis, S. : L functions for the orthogonal group. Mem. Amer. Math. Soc., **128**, no. 611, viii+218 pp (1997)

[8] Harris, M., Kudla, S.: The central critical value of a triple product L-function. Ann. of Math. (2) **133**, 605–672 (1991)

[9] Mizumoto, S: Fourier coefficients of generalized Eisenstein series of degree two. I. Invent. Math. **65**, 115–135 (1981/82)